



# ТЕОРИЯ РИСКА

---

лекции

Поспелова Ирина Игоревна



# Оценка рискованных альтернатив

Как использовать информацию о (совокупном) ущербе для оценки и управления риском, связанным с обязательством страховщика возместить убытки.

Потребитель также может быть заинтересован в оценке того, в какой степени его риск переносится на страховщика при покупке страховки.

Более общий вопрос: как сравнить две или более альтернатив, содержащих неопределенности? Как измерить величину риска, связанного с каждой альтернативой?

Простой способ - сравнение ожидаемых сумм выигрыша. Однако это не всегда соответствует выбору, который на самом деле делают рациональные люди.

**Пример 1.** Выбор из двух рискованных альтернатив.

Вариант 1: выигрыш 200 с вероятностью 0.99 или проигрыш 10 000 с вероятностью 0.01.

Вариант 2: выигрыш 200 с вероятностью 0.5 или потери 10 с вероятностью 0.5.

Вариант 1: ожидаемое значение  $200 \times 0.99 - 10\,000 \times 0.01 = 98$ ,

Вариант 2: ожидаемое значение  $200 \times 0.5 - 10 \times 0.5 = 95 < 98$ .

Однако большинство отвергает вариант 1 из-за вероятности, хоть и малой, очень больших потерь.

# Петербургский парадокс

Мат. ожидание не учитывает величину связанного с ним риска.

Самым известным примером недостатка, присущего использованию ожидаемого значения в качестве инструмента принятия решений, является петербургский парадокс (St.Petersburg paradox), сформулированный Бернулли.

Заплатив цену  $P$ , можно сыграть в следующую игру. Монету подбрасывают до тех пор, пока не выпадет орел. Если это происходит на  $n$ -й бросок, то платят  $2^n$ . Ожидаемая сумма выигрыша равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left( \frac{1}{2^n} \right) = \infty,$$

тем не менее, мало кто согласится играть в такую игру, за исключением случая малого  $P$ . Это значит, что решение не принимается на основании одного лишь мат. ожидания.

# Функция полезности

Таким образом, следует учитывать не фактические выплаченные суммы, а скорее «удовлетворение» или «полезность», которые приходят с обладанием определенным уровнем богатства (блага). Это объяснение лежит в основе концепции теории полезности.

**Функция полезности**  $u: X \rightarrow \mathbb{R}^1$

$u(x)$  возрастает; как правило,  $u(x)$  вогнута (убывающая предельная полезность), в случае дифференцируемой функции  $u'(x) > 0, u''(x) < 0$ . В силу линейности мат. ожидания функция полезности определяется с точностью до линейного преобразования ( $au + b, a > 0$ ). [в мат. экономике – с точностью до монотонного возрастающего преобразования  $f(u(x)), f' > 0$ ]

Если в петербургском парадоксе взять функцию полезности  $\ln x$  и учитывать ожидаемую полезность, а не ожидаемую стоимость фактических сумм, то окажется, что выигрыш равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(2^n) \left( \frac{1}{2^n} \right) < \infty.$$

## Пример 2

Пусть с вероятностью 0.1 происходит потеря в размере 100 долларов. Какова должна быть единовременная премия  $P$ , которая обеспечит страховку от таких потерь, если функция полезности  $u(x) = \ln x$ , а начальное богатство равно

(a) 1000; (b) 500?

(a) В результате страхования полезность равна  $u(1000 - P) = \ln(1000 - P)$ ; в отсутствие страхования ожидаемая полезность  $0.9u(1000) + 0.1u(900) = \ln(1000^{0.9} 900^{0.1})$ .

Приравнивая ожидаемую полезность, находим максимальную  $P$ :  $1000 - P = 1000^{0.9} 900^{0.1}$ ,  $P = 10.48$ .

Таким образом, премия оказывается больше ожидаемых потерь в размере 10 долларов.

(b) Аналогично получаем  $500 - P = 500^{0.9} 400^{0.1}$ ,  $P = 11.03$ .

Премия оказывается еще выше. Чем меньше достаток, тем больше будут платить за страховку из-за большего риска потерь относительно имеющегося капитала.

При сравнении альтернатив с точки зрения ожидаемой полезности необходимо принимать во внимание имеющееся богатство, а не только возможные потери.

## Пример 3

Лицу с начальным состоянием в 10 долларов предлагается сыграть в игру, в которой оно равновероятно выигрывает 2 или 0. Сколько это лицо готово заплатить за участие в такой игре, если его функция полезности  $u(x) = x^2$ ?

Пусть  $P$  - сумма, заплаченная за участие в игре. Приравниваем ожидаемую полезность отказа от игры к выигрышу в игре:

$$100 = 0.5((12 - P)^2 + (10 - P)^2).$$

Таким образом,  $P = 1.0501$ , что больше ожидаемого выигрыша в 1.

Азартные игры обменивают уверенность на неопределенность. Сумма денег, которая у вас есть, точно известна, если вы не играете в азартные игры, но она может быть неопределенной, если вы решите сделать ставку.

Страхование обменивает неопределенность на определенность. Неопределенные финансовые потери преобразуется в уверенность в фиксированных платежах.

# Выпуклые функции

**Определение 1.** Функция  $g$ , определенная на интервале  $I$  вещественной прямой, называется выпуклой, если для всех  $x$  и  $y$  из  $I$  и  $0 \leq \alpha \leq 1$

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y).$$

Особенностью выпуклых функций, которая часто используется, является условие возрастающего наклона: для  $x < y < z$  из  $I$

$$\frac{g(y) - g(x)}{y - x} \leq \frac{g(z) - g(y)}{z - y}.$$

Используется для не всюду дифференцируемых функций.

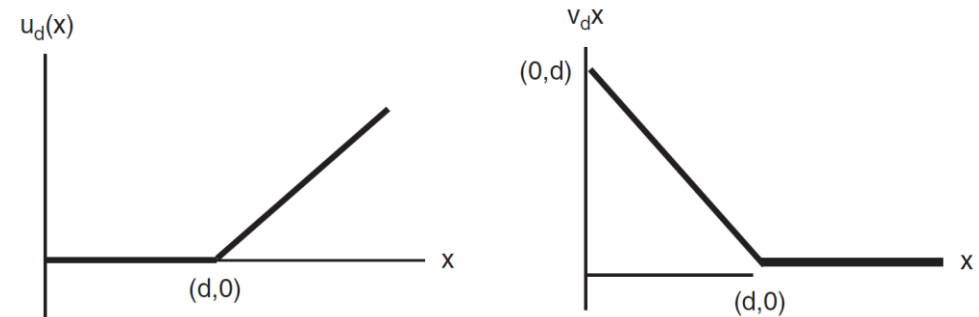
Для дифференцируемых функций выпуклость определяется знаком второй производной.

# Недифференцируемые функции

Важный класс недифференцируемых функций – кусочно-линейные. Любая кусочно-линейная функция может быть записана как линейная комбинация  $u_d$  и  $v_d$ :

$$u_d(x) = (x - d)_+, \quad v_d(x) = d - x \wedge d,$$

Учитывая условие возрастающего наклона, выпуклая кусочно-линейная функция может быть записана как линейная комбинация этих функций с положительными коэффициентами.



Например,

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x < 2 \\ 3x - 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

можно записать как

$$[-x]_+ + x_+ + 2(x - 2)_+ = v_0 + u_0 + 2u_2.$$

# Отношение к риску

Людей с вогнутыми функциями полезности называют *несклонными к риску (risk averse)*, поскольку они предпочитают определенность неопределенности и, следовательно, извлекают пользу из страхования.

Людей с выпуклой функцией полезности называют *любителями риска (risk-seekers)*, поскольку такие люди готовы платить за азартную игру даже при неблагоприятных шансах (казино).

Линейную функцию полезности приписывают *риск-нейтральным* лицам.

## Пример 4

Пусть есть мешочек с двумя пронумерованными шариками. Вы достаете один наугад и получаете сумму, равную квадрату числа на шарике.

Если на обоих шарах был номер 5, вы получите 25.

Если на них написано 4 и 6, что в среднем составляет 5, то ожидаемый выигрыш равен  $0.5(36 + 16) = 26 > 25$ , таким образом, случайность приводит к дополнительному ожидаемому доходу.

Допустим, есть числа 1, 2, 6 (среднее 3). Тогда  $\frac{1}{3}(1 + 2^2 + 6^2) = 13\frac{2}{3} > 3^2$

В общем случае  $0 \leq E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - \mu^2$ , где  $\mu = E[X]$ , поэтому для любой случайной величины  $X$  математическое ожидание  $X^2$  не меньше квадрата мат. ожидания  $X$ .

Для функции квадратного корня выполняется обратное неравенство. Если есть два шара с номерами 16 и 4 (среднее 10), то среднее значение квадратного корня равно  $3 < \sqrt{10}$ .

# Неравенство Йенсена

**Теорема 1.** (неравенство Йенсена) Пусть  $g(\cdot)$  – выпуклая функция. Тогда  
$$E[g(X)] \geq g(E[X]).$$

Для вогнутой функции неравенство выполнено в другую сторону.

**Доказательство.** Приведем доказательство в случае, когда  $g$  имеет непрерывную вторую производную.

Используя разложение в ряд Тейлора с учетом  $E[X] = \mu$ , имеем

$$g(x) = g(\mu) + (x - \mu)g'(\mu) + \frac{(x - \mu)^2}{2}g''(\xi),$$

для некоторой  $\xi$  между  $\mu$  и  $x$ .

Так как  $g$  выпуклая, то  $g'' \geq 0$ , поэтому  $g(x) \geq g(\mu) + (x - \mu)g'(\mu)$ . Беря мат. ожидание, получаем

$$E[g(X)] \geq g(\mu) + g'(\mu)E[X - \mu] = g(\mu).$$

# Верхняя и нижняя границы премии

Для вогнутой функции полезности из неравенства Йенсена

$$E[u(w - X)] \leq u(E[w - X]) = u(w - E[X]).$$

ЛПР с такой функцией полезности предпочитают платить фиксированное количество  $E[X]$  вместо неопределенного  $X$ , поэтому они действительно несклонны к риску.

Предположим, что несклонный к риску страхователь с капиталом  $w$  имеет функцию полезности  $u(\cdot)$ . Если он застрахован от убытка  $X$  за премию  $P$ , его ожидаемая полезность не уменьшится в результате страхования, если

$$E[u(w - X)] \leq u(w - P).$$

Так как  $u(\cdot)$  не убывает, то  $P \leq P^+$ , где  $P^+$  - максимальная премия, которая может быть заплачена. Это премия называется *премией нулевой полезности* и находится из равенства

$$E[u(w - X)] = u(w - P^+).$$

# Верхняя и нижняя границы премии

Страховщик, имеющий функцию полезности  $U(\cdot)$  и капитал  $W$ , застрахует убыток  $X$  за премию  $P$ , если

$$E[U(W + P - X)] \geq U(W),$$

т.е.  $P \geq P^-$ , где  $P^-$  - минимальная премия, допустимая для страховщика. Она находится из условия равновесия (принять риск за премию vs ничего не делать):

$$U(W) = E[U(W + P^- - X)].$$

Должно быть:  $P^+ \geq P^-$ .

В теории страховщики часто считаются риск-нейтральными, так что за риск  $X$  премия  $E[X]$  достаточна. Тогда  $E[U(W + E[X] - X)] = U(W)$  для любого риска  $X$ .

# Оценка максимальной премии

Оценим максимальную премию  $P^+$  за риск  $X$  для заданной функции полезности  $u(\cdot)$

Пусть  $\mu$  и  $\sigma^2$  - среднее и дисперсия  $X$ . Используя разложение  $u(\cdot)$  в окрестности  $\mu$ , получим

$$u(w - P^+) \approx u(w - \mu) + (\mu - P^+)u'(w - \mu);$$

$$u(w - X) \approx u(w - \mu) + (\mu - X)u'(w - \mu) + \frac{1}{2} (\mu - X)^2 u''(w - \mu).$$

Беря мат. ожидание от обеих частей, получаем

$$E[u(w - X)] \approx u(w - \mu) + \frac{1}{2} \sigma^2 u''(w - \mu).$$

Из принципа нулевой полезности

$$\frac{1}{2} \sigma^2 u''(w - \mu) \approx (\mu - P^+)u'(w - \mu).$$

Таким образом,

$$P^+ \approx \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{u''(w - \mu)}{u'(w - \mu)}$$

# Коэффициент несклонности к риску

$$r(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

коэффициент несклонности к риску для функции полезности  $u(\cdot)$  при размере капитала  $w$ .

Тогда максимальная премия за риск  $X$

$$P^+ \approx \mu + \frac{1}{2}r(w - \mu)\sigma^2.$$

Коэффициент несклонности к риску действительно отражает степень неприятия риска: чем больше неприятие риска, тем большую премию готов заплатить страхователь.

Заметим, что  $r(w)$  не меняется при линейном преобразовании  $u(\cdot)$ .

# Семейство степенных функций полезности

Существует множество вариантов функций полезности. Одним из самых популярных является семейство так называемых функций степенной полезности:

$$u_{\gamma}(x) = \frac{x^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}, \quad \gamma \geq 0.$$

Очевидно,  $u'_{\gamma} > 0$ ,  $u''_{\gamma} < 0$ . (Так как функция полезности допускает линейное преобразование, можно рассматривать вариант  $x^{1-\gamma}$  для  $\gamma < 1$  или  $-x^{1-\gamma}$  для  $\gamma > 1$ .)

Преимущество такой формы заключается в том, что можно определить значение при  $\gamma = 1$ :

$$u_1(x) = \lim_{\gamma \rightarrow 1} u_{\gamma}(x) = \ln x.$$

При увеличении  $\gamma$  несклонность к риску увеличивается.

**Пример 2 (а).** Для  $u_{\gamma}(x)$  с  $\gamma = 2$  приводит к равенству

$$-(1000 - P)^{-1} = -0.9(1000)^{-1} - 0.1(900)^{-1} \implies P = 10.99,$$

что больше, чем премия 10.48 при  $\gamma = 1$ .

# Классы функций полезности

Линейная:  $u(w) = w$

квадратичная:  $u(w) = -(\alpha - w)^2, w \leq \alpha; u(w) = 0, w > \alpha$

логарифмическая:  $u(w) = \ln(\alpha + w), w > -\alpha$

экспоненциальная:  $u(w) = -\alpha e^{-\alpha w}, \alpha > 0$

степенная:  $u(w) = w^c, w > 0, 0 < c \leq 1$

Все эти функции имеют неотрицательную и невозрастающую предельную полезность. Коэффициент несклонности к риску для линейной полезности равен 0, для экспоненциальной  $\alpha$ . Для остальных может быть представлен в виде  $(\gamma + \beta w)^{-1}$ .

Заметим, что линейная полезность приводит к принципу эквивалентности и риск-нейтральности, так как если  $E[w + P^- - X] = w$ , то  $P^- = E[X]$ .

# Экспоненциальная премия

Определим минимальную премию  $P^-$  за риск  $X$  для страховщика с экспоненциальной полезностью с параметром  $\alpha$ .

Из условия равновесия  $U(W) = E[U(W + P^- - X)]$  для  $U(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$  получаем

$$P^- = \frac{1}{\alpha} \ln(M_X(\alpha)),$$

где  $M_X(\alpha) = E[e^{\alpha X}]$  – производящая функция моментов  $X$  с аргументом  $\alpha$ .

Экспоненциальная премия не зависит от текущего капитала страховщика, что согласуется с тем, что коэффициент несклонности к риску является константой.

# Экспоненциальная премия

Максимальная премия (за которую готов страховать риск страхователь)  $P^+$  имеет тот же вид с учетом того, что  $\alpha$  является коэффициентом несклонности к риску страхователя.

Пусть потери  $X$  распределены экспоненциально с параметром  $\beta$ .

Пусть  $\beta = 0.01$ , Тогда  $E[X] = 1/\beta = 100$ . Если полезность страхователя экспоненциальная с  $\alpha = 0.005$ , то

$$P^+ = \frac{1}{\alpha} \ln(M_X(\alpha)) = 200 \ln\left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right) = 200 \ln(2) \approx 138.6.$$

Так что страхователь согласен на значительную нагрузку нетто-премии  $E[X]$ .

Приближение  $P^+$  дает  $P^+ \approx E[X] + \frac{1}{2} \alpha \text{Var}[X] = 125$  и увеличивается с ростом  $\alpha$ .

# Экспоненциальная премия

**Теорема 2.** Экспоненциальная премия за риск  $X$  возрастает при увеличении несклонности к риску  $\alpha$ .

**Доказательство.** При  $0 < \alpha < \gamma$  рассмотрим строго вогнутую функцию  $v(x) = \frac{x\alpha}{\gamma}$ . Из неравенства Йенсена  $v(E[Y]) > E[v(Y)]$ ,

для любой случайной величины  $Y$  с  $Var[Y] > 0$ .

Пусть  $Y = e^{\gamma X}$ , тогда  $v(Y) = e^{\alpha X}$  и

$$(E[e^{\gamma X}])^\alpha = \left( (E[Y])^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right)^\gamma = (v(E[Y]))^\gamma > (E[v(Y)])^\gamma = (E[e^{\alpha X}])^\gamma$$

Следовательно,  $\{M_X(\alpha)\}^\gamma < \{M^X(\gamma)\}^\alpha$ , откуда следует, что для любого  $\gamma > \alpha$ , для экспоненциальной премии

$$\frac{1}{\alpha} \ln(M_X(\alpha)) < \frac{1}{\gamma} \ln(M_X(\gamma)).$$

# Квадратичная полезность

Пусть при  $w < 5$  функция полезности страхователя  $u(w) = 10w - w^2$ . Найдем максимальную премию  $P^+$  в зависимости от  $w, w \in [0, 5]$ , для договора страхования убытка 1 с вероятностью  $1/2$ .

Чтобы применить условие равновесия, находим

$$E[u(w - X)] = 11w - 11/2 - w^2$$

и

$$u(w - P) = 10(w - P) - (w - P)^2.$$

Приравнивая, получаем

$$P = P(w) = \sqrt{\left(\frac{11}{2} - w\right)^2 + \frac{1}{4}} - (5 - w), w \in [0, 5].$$

Очевидно, что  $P'(w) > 0$ .

Видим, что лицо, принимающее решение, с квадратичной функцией полезности предпочитает платить большую премию при увеличении своего благосостояния. По этой причине квадратичная полезность не подходит для описания поведения не склонного к риску ЛПР. Однако она все же используется на практике, так как для ее вычисления достаточно знать мат. ожидание и дисперсию.

# Нестрахуемый риск

ЛПР с экспоненциальной полезностью и коэффициентом неприятия риска  $\alpha > 0$  хочет застраховать риск, имеющий гамма распределение с параметрами  $n$  и  $1$ . Найдем  $P^+$ .

$$P^+ = \frac{1}{\alpha} \ln(M_X(\alpha)) = \begin{cases} -n\alpha \ln(1 - \alpha), & 0 < \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

Так как  $\ln(1 + x) < x$  при  $x > -1, x \neq 0$ , то  $\ln(1 - \alpha) < -\alpha$  и, следовательно,  
$$P^+ > E[X] = n,$$

т.е. премия больше нетто-премии.

Если  $\alpha \geq 1$ , то  $P^+ = \infty$ , что означает, что ЛПР готово заплатить любую конечную премию.

Страховщик с коэффициентом несклонности к риску  $\alpha \geq 1$ , страхующий этот риск, понесет (в терминах полезности) убыток при любой конечной премии  $P$ , так что  $P^- = \infty$ . Для такого страховщика этот риск является нестрахуемым.

# Парадокс Алле (Maurice Félix Charles Allias)

Рассмотрим следующие варианты случайных доходов:

$$\begin{aligned} X &= 1000000 \text{ с вероятностью } 1, & Y &= \begin{cases} 5000000 \text{ с вероятностью } 0.10 \\ 1000000 \text{ с вероятностью } 0.89 \\ 0 \text{ с вероятностью } 0.01 \end{cases} \\ V &= \begin{cases} 1000000 \text{ с вероятностью } 0.11 \\ 0 \text{ с вероятностью } 0.89 \end{cases}, & W &= \begin{cases} 5000000 \text{ с вероятностью } 0.10 \\ 0 \text{ с вероятностью } 0.90 \end{cases} \end{aligned}$$

Выбирая между  $X$  и  $Y$ , большинство предпочитают  $X$ , но при этом  $W$  более предпочтительно, чем  $V$ . Этот результат противоречит принципу ожидаемой полезности, так как, предполагая равным 0 начальное благосостояние, получаем, что  $W \succ V$ , т.е.

$E[u(W)] > E[u(V)]$ , что эквивалентно  $0.11u(1000000) < 0.1u(5000000) + 0.01u(0)$ .

Но в то же время,  $X \succ Y$ , т.е.

$$E[u(X)] > E[u(Y)] \implies u(1000000) > 0.1u(5000000) + 0.89u(1000000)$$

Получаем противоположное неравенство.

Таким образом, ожидаемая полезность не всегда адекватно описывает поведение ЛПР.

# Сравнение случайных величин по степени рискованности

**Определение 2.** Для  $X, Y \geq 0$  с  $E[X] = E[Y]$   $X$  менее рискованно, чем  $Y$ , если для всех  $d$

$$E[(X - d)_+] \leq E[(Y - d)_+].$$

Если случайные величины представляют собой убытки, то чистая премия за страхование с франшизой, всегда меньше для менее рискованного варианта.

Так как  $E[X] = E[Y]$ , то неравенство эквивалентно  $E[X \wedge d] \geq E[Y \wedge d]$  для всех  $d \geq 0$ .

$$u_d(x) = (x - d)_+, \quad v_d(x) = d - x \wedge d,$$

Если  $X$  менее рискованно, чем  $Y$ , то для всех  $d \geq 0$

$$E[u_d(X)] \leq E[u_d(Y)], \quad E[v_d(X)] \leq E[v_d(Y)],$$

и, следовательно, для любой кусочно-линейной выпуклой функции  $g$   $E[g(X)] \leq E[g(Y)]$ .

# Сравнение случайных величин по степени рискованности

Произвольную выпуклую функцию можно аппроксимировать кусочно-линейной функцией (выбрать точки и соединить отрезками).

Таким образом, из двух распределений с одинаковым средним значением в случае несклонности к риску будет выбрано менее рискованное.

Это оправдывает определение, данное Ротшильдом и Стиглицем, которое действительно отражает концепцию рискованности.

Не всегда легко решить, является ли одна случайная величина менее рискованной, чем другая, но есть определенные случаи, когда это можно проверить.

# Конечная случайная величина

**Теорема 3.** Предположим, что  $X$  принимает значения  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{N-1} \leq a_N$  (с вероятностью  $1/N$ ) и  $Y$  принимает значения  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{N-1} \leq b_N$  (с вероятностью  $1/N$ );  $E[X] = E[Y]$ .

$X$  менее рискованно, чем  $Y$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i \text{ для } 1 \leq k \leq N.$$

**Доказательство.** Пусть неравенство выполнено. Тогда для некоторого  $d$ ,  $a_k \leq d < a_{k+1}$ , имеем

$$E[X \wedge d] = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^k a_i + (N - k)d \right) \geq \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^k b_i + (N - k)d \right) \geq E[Y \wedge d].$$

Последнее неравенство следует из того, что  $b_i \wedge d$  меньше или равно  $b_i$ , и  $d$  для всех  $i$ .

# Конечная случайная величина

Обратно, пусть  $X$  менее рискованно чем  $Y$ . Фиксируем  $k < N$ , пусть  $d = \max\{a_k, b_k\}$ . Если  $d = b_k$ , то

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (d - a_i) \leq E[v_d(X)] \leq E[v_d(Y)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (d - b_i),$$

если  $d = a_k$ , то

$$\frac{1}{N} \sum_{i=k+1}^N (a_i - d) = E[u_d(X)] \leq E[u_d(Y)] \leq \frac{1}{N} \sum_{i=k+1}^N (b_i - d).$$

В любом случае требуемое условие следует из того, что предположение о равенстве мат. ожиданий означает, что

$$\sum_{i=1}^N a_i = \sum_{i=1}^N b_i.$$

**Замечание.** Поскольку допускается повторение значений, приведенная Теорема 3 может быть применена ко всем конечным дискретным распределениям, где вероятности являются рациональными числами.

# Непрерывные случайные величины

**Теорема 4. (условие отсечения)** Предположим, что для некоторой точки  $c$   $F_X(t) \leq F_Y(t)$  при  $t < c$  и  $F_X(t) \geq F_Y(t)$  при  $t > c$ . Тогда  $X$  менее рискованна чем  $Y$ .

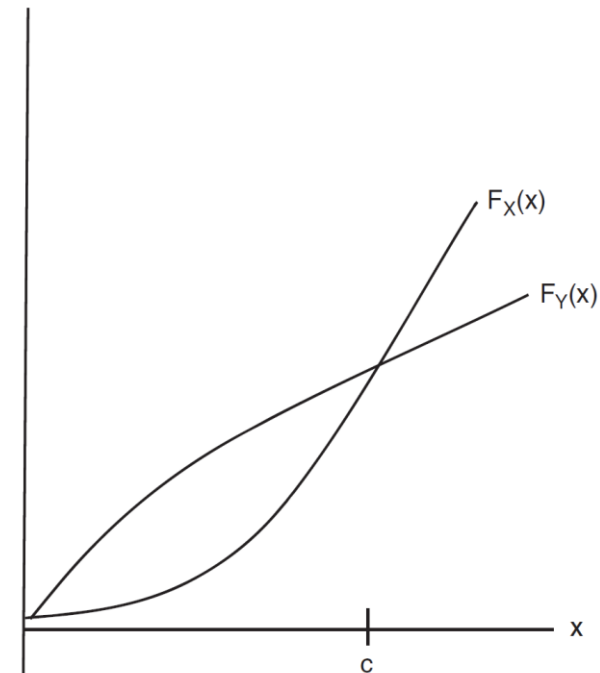
**Доказательство.** Если  $d < c$ ,

$$E[X \wedge d] = \int_0^d S_X(x) dx \geq \int_0^d S_Y(x) dx = E[Y \wedge d],$$

Если  $d > c$ ,

$$E[(X - d)_+] = \int_d^\infty S_X(x) dx \leq \int_d^\infty S_Y(x) dx = E[(Y - d)_+].$$

В силу непрерывности функции  $g(d) = E[(X - d)_+]$ , тот же результат получится при  $d = c$ . Во всех случаях по определению  $X$  менее рискованна чем  $Y$ .



# Отношение рискованности

Отношение рискованности является частичным порядком, который означает, что не все альтернативы сравнимы. Выбирая между  $X$  и  $Y$ , некоторые не склонные к риску люди предпочтут  $X$ , а некоторые  $Y$ .

**Пример.** Случайные величины, представляющие выигрыш:

$X$  принимает значение 1 с вероятностью 0.1 и 10 с вероятностью 0.9,

$Y$  принимает значение 2 с вероятностью 0.9 и 73 с вероятностью 0.1.

$$E[X] = E[Y] = 9.1.$$

Можно было бы ожидать, что не склонный к риску человек выберет  $X$ , гарантирующий ему доход 10 в большинстве случаев, вместо того, чтобы сделать ставку на более высокий доход, который в большинстве случаев приведет к 2. Однако применяя Теорему 3 (заменяв 10 с вер. 0.9 на 10 с вер. 0.1 девять раз и 2 с вер. 0.9 на 2 с вер. 0.1 девять раз), получаем, что  $1 < 2$ , но  $11 > 4$ , поэтому данные риски не сравнимы.

Это происходит потому, что может найтись кто-то настолько не склонный к риску, что он не сможет смириться даже с небольшим шансом возврата всего в 1.

# Премия стоп-лосс

Пусть размер убытка равен  $X$  (считаем, что  $X \sim F_X(x)$ ,  $f_X(x)$  – плотность распределения)

Тогда размер выплаты перестраховщика  $(X - d)_+ = \max(X - d, 0)$

Страховщик удерживает  $d$ , остальное оплачивает перестраховщик. С точки зрения страховщика рост убытка прекращается на уровне  $d$ . Покажем, что договор стоп-лосс является оптимальным с точки зрения дисперсии риска, который остается у страховщика. Это создает проблему – перестраховщики предлагают перестрахование стоп-лосс на менее выгодных условиях, чем другие виды перестрахования.

*Премией стоп-лосс* назовем нетто-премию

$$\begin{aligned}\pi_X(d) &= E[(X - d)_+] \\ E[(X - d)_+] &= \int_d^{\infty} (x - d) f_X(x) dx = \left\{ f_X(x) = F'_X(x) = -(1 - F_X(x))' \right\} = \\ &= -(x - d)[1 - F_X(x)] \Big|_d^{\infty} + \int_d^{\infty} [1 - F_X(x)] dx = \int_d^{\infty} [1 - F_X(x)] dx,\end{aligned}$$

# Премия стоп-лосс

Поэтому

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} [1 - F_X(x)] dx \Rightarrow \pi'_X(d) = F_X(d) - 1$$

Таким образом,  $\pi_X(d)$  непрерывна и строго убывает.

Действительно,  $\pi_X(0) = E[X]$ ,  $\pi_X(\infty) = 0$

Выплата, приходящаяся на долю перестраховщика при перестраховании стоп-лосс с собственным удержанием  $d$  для ущерба  $X$ , равна  $(X - d)_+$ .

Найдем аналитические выражения для нетто-премии стоп-лосс для двух случаев распределении ущерба.

## Пример 5

Пусть выплата  $X$  имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu, \sigma^2$ . Чему равна премия стоп-лосс для  $X$  при собственном удержании  $d$ ?

Пусть  $U \sim N(0, 1)$ , тогда  $X = \sigma U + \mu$  имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu, \sigma^2$ .

Выражение для премии стоп-лосс имеет вид

$$E[(X - d)_+] = E[(\sigma U + \mu - d)_+] = \sigma E[(U - \frac{d - \mu}{\sigma})_+]$$

Поскольку  $\phi'(u) = -u\phi(u)$ , то

$$\int_t^\infty u\phi(u)du = \int_t^\infty [-\phi'(u)]du = \phi(t)$$

Отсюда следует, что

$$\pi(t) = E[(U - t)_+] = \phi(t) - t[1 - \Phi(t)]$$

И значит,

$$E[(X - d)_+] = \sigma\phi\left(\frac{d - \mu}{\sigma}\right) - (d - \mu)\left[1 - \Phi\left(\frac{d - \mu}{\sigma}\right)\right]$$

## Пример 6

Если  $X$  имеет гамма-распределение  $G(\cdot; \alpha, \beta)$  с параметрами  $\alpha, \beta$ , то

$$E[(X - d)_+] = \frac{\alpha}{\beta} [1 - G(d; \alpha + 1, \beta)] - a[1 - G(d; \alpha, \beta)].$$

Аналогично мы можем вывести выражения для старших степенных моментов платежа стоп-лосс  $E[(X - d)_+^k]$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . Таким же образом вычисляется и производящая функция моментов этого платежа, а следовательно, премии стоп-лосс при экспоненциальной функции полезности.

Замечание. Поскольку либо  $X \leq d$  и  $(X - d)_+ = 0$ , либо  $X > d$  и  $(X - d)_+ = X - d$ , соотношение

$$[(X - d) - (X - d)_+][(X - d)_+] = 0$$

выполняется всегда.

Отсюда легко получить выражения для степенных моментов убытка  $X - (X - d)_+$ , оставляемого на собственном удержании, через степенные моменты платежа стоп-лосс:

$$\{X - d\}^k = \{[X - d - (X - d)_+] + (X - d)_+\}^k = \{X - d - (X - d)_+\}^k + \{(X - d)_+\}^k.$$

Это соотношение выполняется, поскольку благодаря формуле выше остальные члены в разложении бинома обращаются в 0.

# Оптимальность перестрахования стоп-лосс

**Теорема 5.** Обозначим через  $I(X)$  выплату по некоторому договору перестрахования, если ущерб равен  $X, X \geq 0$ .

Пусть  $0 \leq I(x) \leq x \quad \forall x \geq 0$ . Тогда выполнена импликация:  $E[I(X)] = E[(X - d)_+] \Rightarrow \text{Var}[X - I(X)] \geq \text{Var}[X - (X - d)_+]$ .

**Доказательство.**

Заметим, что  $\forall I(\cdot)$  можно подобрать удержание  $d$  так, чтобы  $E[I(X)] = E[(X - d)_+]$ .

В этом случае риски, оставляемые на собственном удержании, имеют вид

$$V(X) = X - I(X) \text{ и } W(X) = X - (X - d)_+$$

Поскольку  $E[V(X)] = E[W(X)]$ , то достаточно показать, что  $E[(V(X) - d)^2] \geq E[(W(X) - d)^2]$ . Для этого достаточно, чтобы неравенство

$$|V(X) - d| \geq |W(X) - d| \text{ выполнялось с вероятностью } 1.$$

Если  $X \geq d$ , то  $W(X) = d$  и неравенство очевидно. Если  $X < d$ , то  $W(X) = X$  и

$$V(X) - d = X - I(X) - d \leq X - d = W(X) - d < 0 \Rightarrow |V(X) - d| \geq |W(X) - d|.$$

Таким образом, перестрахование стоп-лосс минимизирует дисперсию риска, оставляемого на собственном удержании.

В теореме решающую роль играет предположение, что при одинаковых ожидаемых выплатах премия при перестраховании стоп-лосс равна премии при других видах перестрахования. Поскольку дисперсия капитала перестраховщика при перестраховании стоп-лосс будет больше, чем при других видах перестрахования, на практике перестраховщик, будучи всегда не слишком склонным к риску, будет взимать за перестрахование стоп-лосс большую премию.

# Оптимальность пропорционального перестрахования

Для иллюстрации важности требования независимости премии от типа перестрахования рассмотрим следующую задачу.

Предположим, что страховщик взимает премию  $(1 + \theta)E[X]$  и подбирает наиболее прибыльное перестрахование с выплатой  $I(X)$ ,  $0 \leq I(X) \leq X$ , и заданной дисперсией

$$\text{Var}[X - I(X)] = V.$$

Страховщик хочет максимизировать свою ожидаемую прибыль в предположении, что степень нестабильности его финансового положения заранее определена.

Рассмотрим два метода, которыми перестраховщик может вычислить премию при использовании перестрахования с выплатой  $I(X)$ .

- Сценарий А: перестраховщик назначает премию, исходя из того же принципа, что и страховщик, т.е.

$$(1 + \lambda)E[I(X)].$$

- Сценарий В: перестраховщик определяет премию в соответствии с принципом дисперсии, т. е.

$$E[I(X)] + \alpha \text{Var}[I(X)].$$

# Оптимальность пропорционального перестрахования

Найдем ожидаемую прибыль страховщика (премия минус ожидаемое значение риска, оставленного на собственном удержании, минус перестраховочная премия):

$$\mathbf{A:} \quad (1 + \theta)E[X] - E[X - I(X)] - (1 + \lambda)E[I(X)] = \theta E[X] - \lambda E[I(X)],$$

$$\mathbf{B:} \quad (1 + \theta)E[X] - E[X - I(X)] - (E[I(X)] + \alpha \text{Var}[I(X)]) = \theta E[X] - \alpha \text{Var}[I(X)].$$

Легко видеть, что при обоих сценариях размер ожидаемой прибыли равен размеру исходной ожидаемой прибыли  $\theta E[X]$  за вычетом ожидаемой прибыли перестраховщика.

Значит, необходимо минимизировать ожидаемую прибыль перестраховщика.

# Минимум прибыли перестраховщика

Это приводит к следующим задачам минимизации:

$$\mathbf{A}: \min E[I(X)]$$

$$Var[X - I(X)] = V$$

$$\mathbf{B}: \min Var[I(X)]$$

$$Var[X - I(X)] = V$$

Решим задачу **B**:

$$Var[I(X)] = Var[X] + Var[I(X) - X] - 2 Cov[X, X - I(X)].$$

Поскольку два первых слагаемых в правой части фиксированы, необходимо максимизировать ковариацию. При заданных дисперсиях это достигается выбором линейно зависящих  $X$  и  $X - I(X)$ , а именно  $I(x) = \gamma + \beta x$ .

Так как  $0 \leq I(x) \leq x$ , то  $\gamma = 0$  и  $0 \leq \beta \leq 1$ .

$$Var[X - I(X)] = Var[X - \beta X] = (1 - \beta)^2 Var[X] = V \Rightarrow (1 - \beta)^2 = V / Var[X]$$

Таким образом, при заданной дисперсии риска, оставляемого на собственном удержании, и при использовании перестраховщиком для расчета премии принципа дисперсии оптимальным является пропорциональное перестрахование, при котором  $I(X) = \beta X$ ,  $\beta = 1 - \sqrt{V / Var[X]}$ .

# Парето-оптимальность стоп-лосс

Для решения задачи **A** используем доказанную теорему об оптимальности перестрахования стоп-лосс.

Функции

$$\mu(d) = E[X - (X - d)_+] \text{ и } \sigma^2(d) = Var[X - (X - d)_+]$$

непрерывно возрастают с ростом  $d$  и

$$\mu(0) = \sigma^2(0) = 0, \mu(\infty) = E[X], \sigma^2(\infty) = Var[X].$$

(так как  $\mu'(d) = 1 - F_X(d)$  и  $(\sigma^2)'(d) = 2[1 - F_X(d)][d - \mu(d)]$ ),

Точки, изображающие ожидаемое значение и дисперсию риска, оставляемого на собственном удержании, могут располагаться только выше этой кривой на плоскости  $\mu, \sigma^2$  (по теореме об опт-ти стоп-лосс)

# Парето-оптимальность стоп-лосс

Точки, изображающие ожидаемое значение и дисперсию риска,  $\sigma^2$  оставляемого на собственном удержании, могут располагаться только выше этой кривой на плоскости  $\mu, \sigma^2$  (по теореме об опт-ти стоп-лосс). Это обусловлено тем, что дисперсия не может быть меньше, чем при перестраховании стоп-лосс с тем же ожидаемым значением. Отсюда следует, что такие точки могут располагаться лишь слева от кривой.

И можно заключить, как и в теореме, что непропорциональное перестрахование стоп-лосс дает решение задачи **A**. Перестрахование стоп-лосс в данном случае является *оптимальным по Парето*: не существует решений с меньшей дисперсией и большим ожидаемым доходом.

На рисунке изображено множество точек  $(\mu(d), \sigma^2(d))$  для  $d \in [0, \infty)$  и некоторой случайной величины  $X$  потерь.

